円錐曲線

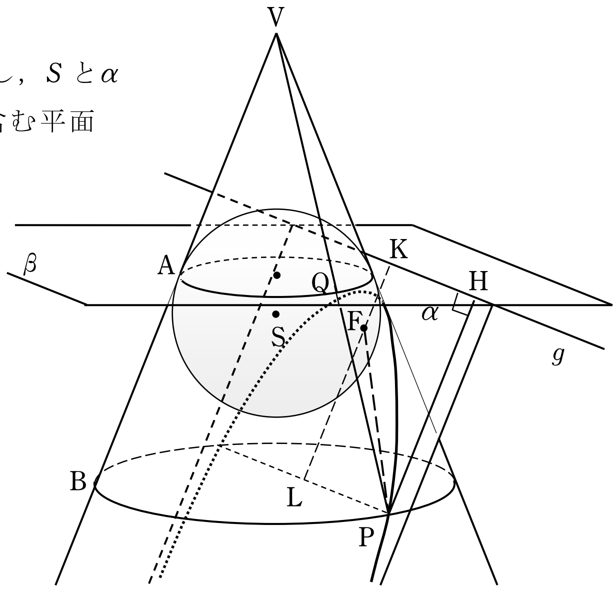
空間に，1 点 V で交わる（ただし，直交していない）2 直線 l, m がある。l のまわりに，m を回転してできる曲面を，V を頂点とし，l を軸とする**円錐面**という。V を通る円錐面上の直線を**母線**という。円錐面を，頂点 V を通らない平面で切ったときにできる図形を**円錐曲線**という。

(ⅰ) 円錐面を，1 つの母線に平行な平面αで切ったとき，その切り口の図形は放物線である。

(ⅱ) 円錐面を，軸 l とのなす角が軸 l と母線 m とのなす角より大きい平面αで切ったとき，切り口の図形は楕円である。

(ⅲ) 円錐面を，軸 l とのなす角が軸 l と母線 m とのなす角より小さい平面αで切ったとき，切り口の図形は双曲線である。

〔解説〕



(ⅰ) 平面 αに接し，円錐面に内接する球を S とし，S とαの接点を F，S と円錐面との接点からなる円を含む平面をβ，2 平面 α, βの交線を g とする。

円錐面と平面αの交線上の任意の点を P とし，母線を VP と平面 βとの交点を Q とすれば，PF＝PQ である。（□ PF，PQ は，球 S の外部にある点 P から球 S に引いた接線であるから，その長さは等しい。）

点 P から直線 g に下ろした垂線の足を H，点 P を通りβに平行な平面をγとし，平面 αに平行な母線が 2 平面β，γによって切り取られる部分を AB とすれば，PQ＝BA＝PH である。（□PQ と BA は 2 平面β，γで挟まれた　　母線の一部だからその長さは等しく，BA∥PH より，BA＝PH）　　∴ PF＝PH

よって，点 P は，F を焦点，g を準線とする放物線上の点である。

(ⅱ) 平面 αに接し，円錐面に内接する球 S，S'とし，これらの球と平面αとの接点をそれぞれ F，F′とする。また，円錐面と球 S，S'との接点からなる円を含む平面をそれぞれ β，β'とし，β，β'と平面αとの交線をそれぞれ g，g'とする。円錐面と平面 α の交線上の任意の点を P とし，母線 VP と 2 平面β，β'の交点をそれぞれ Q，R とすれば，PF＝PQ，PF′＝PR である。（PF，PQ は P から球 S に引いた接線で，PF′，PR は P から球 S'に引いた接線だからその長さはそれぞれ等しい。）

∴　PF＋PF′＝PQ＋PR＝QR（一定）（□ 母線が 2 平面β，β'に挟まれた部分の長さ）

よって，点 P は F，F′を焦点とする楕円上の点である。

また，点 P を通りβ に平行な平面を γとし，g に垂直な母線で 2 平面 β，γに挟まれた部分の一方を AB とする。点 P から直線 g に下ろした垂線の足を H とし，直線 g 上に K，軸 l 上に L を，LK $\underline{\mathrel{/\!\!/}}$ PH で，AB と LK が交わるようにとると，$\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{LK}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{LK}}$（一定）である。

軸 l と母線 m とのなす角をθ,
軸 l と平面 α とのなす角をφとすると

$$\mathrm{AB}\cos\theta=\mathrm{LK}\cos\varphi$$

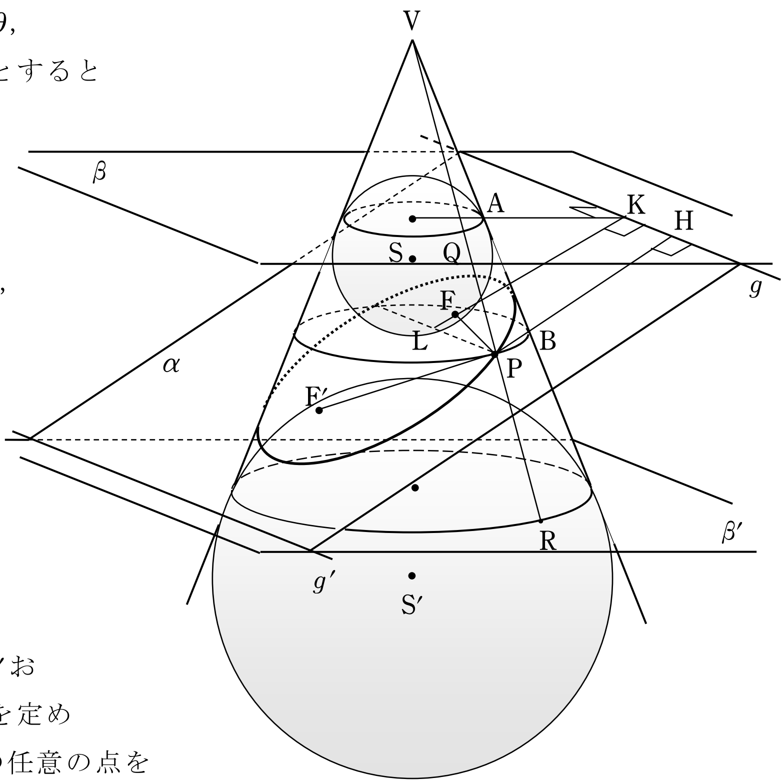
$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{LK}}=\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}<1$$

同様に，点 P から g' に下ろした垂線の足を H′とすると，

$$\frac{\mathrm{PF'}}{\mathrm{PH'}}=\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}$$

である。

ゆえに，点 P は F，F′を焦点，g，g'を準線とする楕円上の点である。



(ⅲ) 楕円の場合と同様に，球 S，S'，平面 β，β'，交線 g，g'および点 F，F′，Q，R，H などを定める。円錐面と平面αの交線上の任意の点を P とすると，

PF ＝PQ，PF′＝PR（P から球 S，S'に引いた接線の長さ）より

$$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=|\mathrm{PQ}-\mathrm{PR}|=\mathrm{QR}$$

（一定で，母線が 2 平面 β，β'に挟まれた部分の長さ）

ゆえに，点 P は F，F′を焦点とする双曲線上の点である。

また，

$$\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{LK}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{LK}}=\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}>1$$

（θは軸 l と母線 m とのなす角，φは軸 l と平面 α とのなす角）である。

同様に，

$$\frac{\mathrm{PF'}}{\mathrm{PH'}}=\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}$$ であるから，点 P は，F，F′を焦点，g，g'を準線とする双曲線上の点である。